数学 I

実数 x に対して，x 以下の最大の整数を $[\,x\,]$ と表すことにする．いま，数列 $\{\,a_n\,\}$ を

$$a_n = \left[\sqrt{2n} + \frac{1}{2}\right]$$

と定義すると

$$a_1 = \boxed{(1)},\quad a_2 = \boxed{(2)},\quad a_3 = \boxed{(3)},\quad a_4 = \boxed{(4)},\quad a_5 = \boxed{(5)},\quad a_6 = \boxed{(6)},\quad \ldots$$

となる．このとき，$a_n = 10$ となるのは，$\boxed{(7)}\boxed{(8)} \leqq n \leqq \boxed{(9)}\boxed{(10)}$ の場合に限られる．また，

$$\sum_{n=1}^{\boxed{(9)}\boxed{(10)}} a_n = \boxed{(11)}\boxed{(12)}\boxed{(13)}\boxed{(14)}$$

である．

総

数学 II

10 進法で表したとき m 桁 $(m>0)$ である正の整数 n の第 i 桁目 $(1 \leqq i \leqq m)$ を n_i としたとき，$i \neq j$ のとき $n_i \neq n_j$ であり，かつ，次の (a) または (b) のいずれかが成り立つとき，n を 10 進法 m 桁のデコボコ数と呼ぶことにする.

(a) $1 \leqq i < m$ である i に対して，i が奇数のとき $n_i < n_{i+1}$ となり，i が偶数のとき $n_i > n_{i+1}$ となる.

(b) $1 \leqq i < m$ である i に対して，i が奇数のとき $n_i > n_{i+1}$ となり，i が偶数のとき $n_i < n_{i+1}$ となる.

例えば，361 は (a) を満たす 10 進法 3 桁のデコボコ数であり，52409 は (b) を満たす 10 進法 5 桁のデコボコ数である．なお，4191 は (a) を満たすが，「$i \neq j$ のとき $n_i \neq n_j$ である」の条件を満たさないため，10 進数 4 桁のデコボコ数ではない.

(1) n が 10 進法 2 桁の数 $(10 \leqq n \leqq 99)$ の場合，$n_1 \neq n_2$ であれば，(a) または (b) を満たすため，10 進法 2 桁のデコボコ数は $\boxed{(15)}\boxed{(16)}$ 個ある.

(2) n が 10 進法 3 桁の数 $(100 \leqq n \leqq 999)$ の場合，(a) を満たすデコボコ数は $\boxed{(17)}\boxed{(18)}\boxed{(19)}$ 個，(b) を満たすデコボコ数は $\boxed{(20)}\boxed{(21)}\boxed{(22)}$ 個あるため，10 進法 3 桁のデコボコ数は合計 $\boxed{(23)}\boxed{(24)}\boxed{(25)}$ 個ある.

(3) n が 10 進法 4 桁の数 $(1000 \leqq n \leqq 9999)$ の場合，(a) を満たすデコボコ数は $\boxed{(26)}\boxed{(27)}\boxed{(28)}\boxed{(29)}$ 個，(b) を満たすデコボコ数は $\boxed{(30)}\boxed{(31)}\boxed{(32)}\boxed{(33)}$ 個あるため，10 進法 4 桁のデコボコ数は合計 $\boxed{(34)}\boxed{(35)}\boxed{(36)}\boxed{(37)}$ 個ある．また，10 進法 4 桁のデコボコ数の中で最も大きなものは $\boxed{(38)}\boxed{(39)}\boxed{(40)}\boxed{(41)}$，最も小さなものは $\boxed{(42)}\boxed{(43)}\boxed{(44)}\boxed{(45)}$ である.

数学 III

実数 $k>0$ に対して，関数 $A(k)=\displaystyle\int_0^2 \left| x^2-kx \right| dx$ とすると

$$A(k)=\begin{cases} \dfrac{\boxed{(46)}\boxed{(47)}\,k^3+\boxed{(48)}\boxed{(49)}\,k^2+\boxed{(50)}\boxed{(51)}\,k+\boxed{(52)}\boxed{(53)}}{\boxed{(54)}\boxed{(55)}} & \left(0<k<\boxed{(56)}\boxed{(57)}\right) \\ \\ \dfrac{\boxed{(58)}\boxed{(59)}\,k+\boxed{(60)}\boxed{(61)}}{\boxed{(62)}\boxed{(63)}} & \left(\boxed{(56)}\boxed{(57)}\leqq k\right) \end{cases}$$

となる．この関数 $A(k)$ が最小となるのは $k=\sqrt{\boxed{(64)}\boxed{(65)}}$ のときで，そのときの $A(k)$ の値は

$\dfrac{\boxed{(66)}\boxed{(67)}+\boxed{(68)}\boxed{(69)}\sqrt{\boxed{(70)}\boxed{(71)}}}{\boxed{(72)}\boxed{(73)}}$ である．

数学 IV

一辺の長さが 2 の正方形の折り紙 ABCD を次の手順にしたがって折る.

(1) A と B, D と C を合わせて AD が BC に重なるように谷折りし, 折り目をつけて開く. AB および DC 上にあるこの谷折り線の端点をそれぞれ E および F とする.

(2) AF が谷折り線になるように谷折りし, 折り目をつけて開く.

(3) A を谷折り線の端点の 1 つとして, AB が AF 上に重なるように谷折りし, 折り目をつけて開く. BC 上にあるこの谷折り線のもう 1 つの端点を G とする.

(4) D と A, C と B を合わせて DC が AB に重なるように谷折りして, 折り目をつける. AD および BC 上にあるこの谷折り線の端点をそれぞれ H および I とする.

(5) C と B がいずれも G と重なるように 2 枚重ねて谷折りし, CI および BI 上に折り目をつけて開く. この折り目の点をそれぞれ J および K とする (A, E, B, K はそれぞれ D, F, C, J と重なっているため図中には表示していない).

(6) HI を谷折り線とする谷折りを開く (A, E, B, K はそれぞれ D, F, C, J と重なっているため図中には表示していない).

(7) K を谷折り線の端点の 1 つとして, J が AB 上に重なるように谷折りし, 折り目をつける. AD 上にあるこの谷折り線のもう 1 つの端点を L とし, AB 上にある J が重なる点を M とする.

(8) KL を谷折り線とする谷折りを開く (M は J と重なっているため図中には表示していない).

(9) M を谷折り線の端点の 1 つとして, A と D がそれぞれ BE と CF 上にくるように谷折りし, 折り目をつけて開く. DC 上にあるこの谷折り線のもう 1 つの端点を N とする.

(10) 折るのをやめる.

このとき

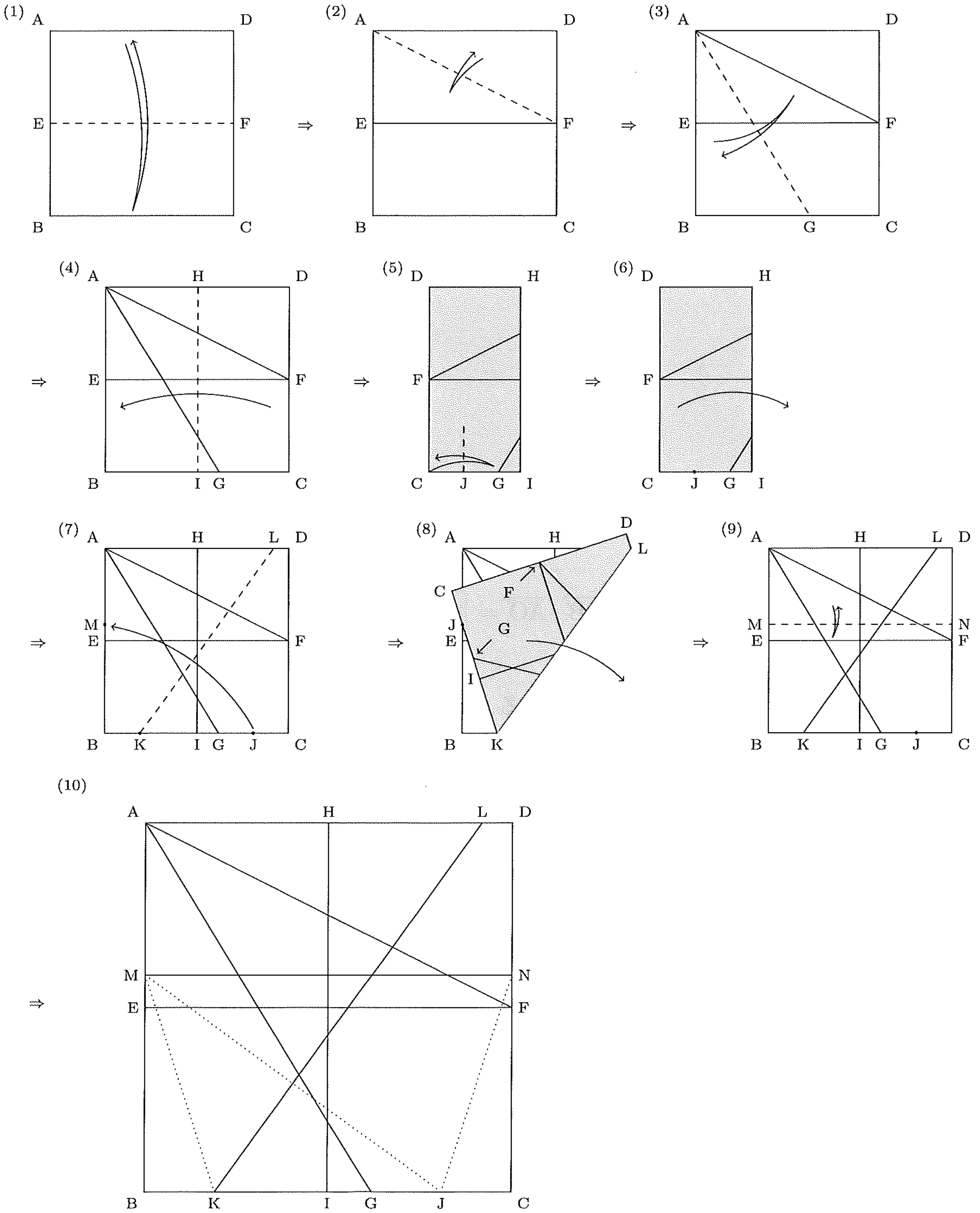
$$\mathrm{BG}=\boxed{(74)}\boxed{(75)}+\sqrt{\boxed{(76)}\boxed{(77)}},\qquad \mathrm{JK}=\boxed{(78)}\boxed{(79)}+\sqrt{\boxed{(80)}\boxed{(81)}},\qquad \mathrm{JM}=\boxed{(82)}\boxed{(83)},$$

$$\cos\angle\mathrm{JKM}=\frac{\boxed{(84)}\boxed{(85)}+\boxed{(86)}\boxed{(87)}\sqrt{\boxed{(88)}\boxed{(89)}}}{\boxed{(90)}\boxed{(91)}}.$$

ここで，$\triangle$JKM の面積を S_1，$\triangle$JMN の面積を S_2 とすると

$$\frac{S_2}{S_1}=\frac{\boxed{(92)}\boxed{(93)}+\sqrt{\boxed{(94)}\boxed{(95)}}}{\boxed{(96)}\boxed{(97)}}$$

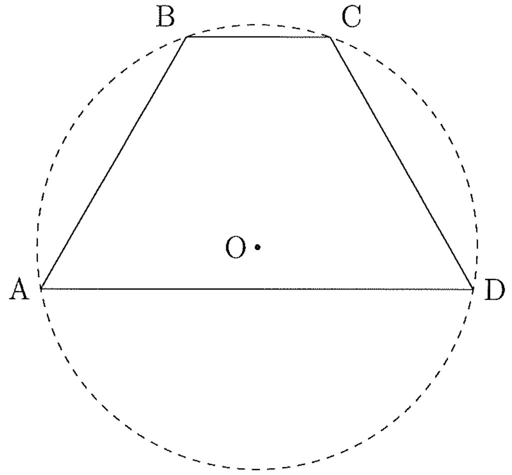
となる．



（出典: 堀井洋子，折り紙サークル『折り紙で数学』明治図書出版，2005.）

数学 V

いま，AD を下底，BC を上底とする台形 ABCD において，$\angle BAD = \angle CDA = 60°$, $|\overrightarrow{AB}| = 2$, $|\overrightarrow{BC}| = 1$ となっている．



このとき

(1) $|\overrightarrow{BD}| = \sqrt{\boxed{(98)}\boxed{(99)}}$ であり，台形 ABCD の外接円の半径は $\dfrac{\sqrt{\boxed{(100)}\boxed{(101)}}}{\boxed{(102)}\boxed{(103)}}$ であり，

(2) 外接円の中心を O とするとき，内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO} = \boxed{(104)}\boxed{(105)}$，$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AO} = \dfrac{\boxed{(106)}\boxed{(107)}}{\boxed{(108)}\boxed{(109)}}$ であり，

(3) $\overrightarrow{AO} = \dfrac{\boxed{(110)}\boxed{(111)}}{\boxed{(112)}\boxed{(113)}}\overrightarrow{AB} + \dfrac{\boxed{(114)}\boxed{(115)}}{\boxed{(116)}\boxed{(117)}}\overrightarrow{AD}$ である．

数学 VI

新型ウイルスの感染拡大にともなって，ある国の自治体がある飲食店に 1 ヶ月間の休業要請を行い，もし飲食店が要請に応じた場合，自治体は飲食店に補償金を払うことになったものとする．

いま，この飲食店は補償金が 90 万円以上であれば要請に応じ，90 万円未満なら要請に応じないものとする．補償金の額を C 万円としたとき，$(\mathrm{C}-90)$ 万円を飲食店の超過利益と呼ぶことにする．もし $\mathrm{C}<90$ であれば，飲食店は要請に応じず，超過利益も 0 万円とする．

また，この自治体は支払うことのできる補償金の上限が定まっていて，それが D 万円 $(\mathrm{D} \geqq \mathrm{C})$ であったとき，飲食店が C 万円で要請に応じた場合，$(\mathrm{D}-\mathrm{C})$ 万円は補償金の節約分となる．ただし，飲食店が要請に応じなかった場合には，補償金の節約分は 0 万円とする．

(1) まず，自治体が飲食店に休業要請する場合の補償金の額 C 万円を提示する場合について考える．いま，自治体の補償金の上限が 125 万円であったとき，自治体の補償金の節約分が最も大きくなるのは $\mathrm{C}=$ $\boxed{(118)}\boxed{(119)}\boxed{(120)}$ 万円の場合である．

(2) 次に，飲食店が自治体に休業申請し，自治体が申請を受理した場合に，飲食店は休業と引き替えに補償金を受け取ることができる場合について考える．なお，飲食店は休業申請をする際に 90 万円以上の補償金の額を自治体に提示するものとする．また，ここでは自治体が支払うことができる補償金の上限については，125 万円か 150 万円か 175 万円のどれかに定まっているが公表されておらず，飲食店は 125 万円である確率が $\frac{2}{5}$，150 万円である確率が $\frac{1}{5}$，175 万円である確率が $\frac{2}{5}$ であると予想しているものとする．

ただし，飲食店が提示した補償金の額が，実際に自治体が支払うことができる上限を超えていた場合，自治体は申請を受理せず，そのときの補償金の節約分は 0 万円になり，申請が受理されなければ，飲食店は休業せず，超過利益は 0 万円になる．たとえば，飲食店が休業申請をする際に $\mathrm{C}=160$ 万円を提示した場合，飲食店の超過利益 (の期待値) は $\boxed{(121)}\boxed{(122)}\boxed{(123)}$ 万円となる．

そこで，飲食店が超過利益 (の期待値) を最も大きくする補償金の額を休業申請の際に自治体に提示したとすると

(a) 飲食店の超過利益 (の期待値) は $\boxed{(124)}\boxed{(125)}\boxed{(126)}$ 万円であり，

(b) 自治体の補償金の上限が実際は 125 万円であった場合，補償金の節約分は $\boxed{(127)}\boxed{(128)}\boxed{(129)}$ 万円，

(c) 自治体の補償金の上限が実際は 175 万円であった場合，補償金の節約分は $\boxed{(130)}\boxed{(131)}\boxed{(132)}$ 万円

となる．